Projet du cours Programmation de cartes graphiques

Lefebvre Florian

May 21, 2023

Contents

1 Introduction

1.1 Résumé de l'objectif du projet

L'objectif du projet est de réaliser une démo sur la base des règles de la track 64K d'API8. Le code source et son contenu multimédia incluant le fichier vidéo doit peser 64 Ko. Les conseils promulgués par Monsieur Farès

Belhadj pour ce projet sont : la création/déformation de maillage (CPU et/ou vertex ou geometry shader), l'utilisation poussée de l'éclairage (déplacements de lumières, jeux de lumières), l'ombre portée, les systèmes de particules (mobile ...), la synchronisation du maillage ou des déplacements avec l'audio (de préférence après analyse fréquentielle), l'originalité des transitions, les effets post-traitement, la synthèse de fractales et ou bruits procéduraux (bruit de perlin CPU ou GPU), l'écran de crédits, ... et surtout l'harmonie de l'ensemble ! (si ça raconte une histoire c'est encore mieux). L'audio doit être libre de droits et cité dans les crédits de la démo.

1.2 Le choix du thème du projet

Parmi les objectifs de ce cours, l'un d'entre eux est de raconter une histoire. En prenant les nombres comme contexte à ce projet, et leurs différentes formes, j'ai trouvé qu'il serait intéressant de voir visuellement ce qu'ils pouvaient représenter et ainsi peut-être découvrir des animations originales et créatives. En analysant chacun des types de nombre, une forme visuelle peut leur être associée et engendrée ainsi un scénario à la fois mathématique et graphique. La mise en place de ce projet n'a pas pour objectif d'être exhaustif sur les différents types de nombre en Mathématiques, mais simplement de parcourir de façon très aléatoire certains types de nombres et leurs formes graphiques. La référence [LIN2022] est un livre très intéressant auquel je me suis beaucoup appuyé pour sélectionner certains types de nombre.

1.3 Le choix de la musique

Il me parassait logique d'associé à l'aspect visuel de ce projet une musique parlant des nombres. Le groupe Kraftwerk [KRA2023] a justement un titre très connu dans leur discographie se nommant *Numbers*[KRA2000].

Kraftwerk (« centrale électrique » en allemand) est un groupe allemand de musique électronique qui a joué un rôle prépondérant dans le développement de cette musique. Leurs productions novatrices et expérimentales influenceront par la suite un certain nombre de groupes new wave des années 1980. La sonorité musicale du groupe se caractérise par la combinaison d'une ligne de basse et d'une rythmique électrique à une harmonique et une mélodie répétitive faite à partir de synthétiseurs, accompagnée de paroles minimalistes chantées ou vocodées dans plusieurs langues (allemand, français, espagnol, anglais, russe, japonais). Les albums de Kraftwerk sont encore aujourd'hui d'une modernité étonnante.

J'ai trouvé que cette musique de part le thème des nombres qu'elle traite et la dynamique qu'elle engendre, serait intéressante à associer à mon projet.

Au bout du compte, c'est un peu comme si je devais faire un clip vidéo sur cette musique. Le groupe Kratwerk de part sa musique très avant-gardiste et son influence dans différentns types de musique actuels a d'ailleurs souvent associé à sa musique des effets visuels. J'ai d'ailleurs repris l'un d'entre eux comme épilogue à ce projet représentant le sigle de ce groupe.

Figure 1: Le groupe Kraftwerk

Malheureusement, j'ai dû changer par la suite de bande sonore car celle que je voulais prendre n'était pas disponible dans un format qui aurait pu respecter les 64k. J'ai malgré tout trouver une autre bande sonore de ce même groupe qui s'appelle "Models" de bonne qualité sonore, et qui n'occupe que 32K au format midi. L'important étant pour moi de rester dans la musique de ce groupe que j'apprécie beaucoup. "Models" est un titre faisant pensant aux modèles mathématiques. J'ai livré finalement deux archives de ce projet. La première respecte le format 64K livré avec la musique du titre "Models". La seconde dépensant 64K livré avec la musique "Numbers".

2 Les différents types de nombre

2.1 Introduction aux nombres

Je vais maintenant présenter les différents types de nombre par ordre d'apparition dans la démo. Cette chronologie est complètement aléatoire. Chaque type de nombre sera défini par son concept mathématique et sa représentation visuelle. Mais avant d'aborder les différents types de nombres, la démonstration commence par un affichage aléatoire des nombres de 0 à 9 pour être en phase avec la musique du groupe Kraftwerk qui commence également par dire oralement en allemand des chiffres avant de rentrer dans la partie principale de leur morceau. Pour réaliser graphiquement ces nombres, j'ai simplement utiliser une matrice de correspondance pour associer à chaque partie de segment d'un nombre son rectangle associé.

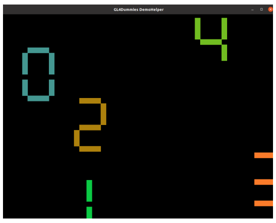

Figure 2: Introduction aux nombres

2.2 Les nombres naturels

Les nombres naturels sont des nombres que l'on utilise dès notre plus petit age. Ils peuvent être multipliés, additionnés. Les plus petits nombres naturels peuvent être soustrait des plus grands nombres pour donner lieu à un nombre naturel. Pour les Grecs de l'antiquité, les nombres ayant peu de diviseurs sont des nombres déficients car la somme de leur diviseur est plus petit que le nombre lui-même, comme le nombre 10. Ses facteurs sont 1, 2 et 5 ont pour somme 8. D'autres nombres ayant beaucoup de facteurs sont appelés abondants car la somme de leur nombre est supérieur au nombre lui-même, comme le nombre 12 dont la somme des facteurs 1,2,3,4,6 est égale à 16. Entre ces deux extrêmes, un nombre était considéré comme parfait s'il était égal à la somme de ses diviseurs, comme le nombre 6 dont la somme de ses facteurs 1, 2, 3 est égale à 6.

D'un point de vue graphique, j'ai réutilisé les nombres de la partie introduction, pour tirer un nombre aléatoirement entre 1 et 99, puis afficher son apparence rectangulaire. D'un point de vue historique, les pythagoriciens étaient fascinés par *les nombres rectangulaires*. Tout nombre pouvant être représenté par un rectangle peut être divisé par son côté et sa largeur, et est donc un nombre composé. Tout nombre ne pouvant être représenté par un rectangle est donc un nombre premier.

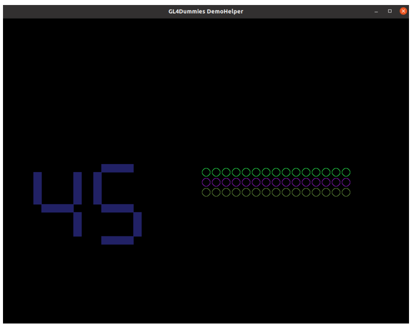

Figure 3: Les nombres naturels

2.3 Les nombres premiers

Un nombre premier est un nombre qui se divise que par 1 ou par lui-même. Par exemple 7 est un nombre premier car il ne se divise que par 7 ou 1. Deux nombres sont premiers entre eux si leur diviseurs commun est que 1. Par exemple 4 et 7 sont premiers entre eux car leur seul diviseur commun est 1. Si l'on dessine un treillis de 4 * 7, la diagonale ne coupera jamais un point.

Il y aussi la spiral d'Ulam qui permet de représenter les nombres premiers. La Spirale d'Ulam est un motif de nombres premiers disposés en spirale sur une grille carrée. Elle est nommée en l'honneur du mathématicien polonais Stanislaw Ulam, qui l'a découverte en 1963.

Le fonctionnement de la spirale d'Ulam est relativement simple. On commence par dessiner une grille carrée, et on place le nombre 1 au centre de la grille. Ensuite, on ajoute les nombres suivants en spirale, en partant du centre et en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre. A chaque étape, on ajoute le nombre suivant dans la case vide la plus proche, en évitant les cases déjà occupées par un nombre. Pour identifier les nombres premiers dans la spirale d'Ulam, j'ai utilisé des mini-carrés multicolores à chaque nombre premier généré. La spirale d'Ulam est un exemple intéressant de la beauté et de la complexité des motifs mathématiques. La figure ci-dessous montre un exemple aléatoire de 32 * 32 nombres affichant parmi eux les nombres premiers.

Figure 4: Les nombres premiers

2.4 Les nombres polygonaux

En mathématiques, un nombre polygonal est un nombre figuré qui peut être représenté par un polygone régulier. Les mathématiciens antiques ont découvert que des nombres pouvaient être représentés en disposant d'une certaine manière des cailloux ou des pois. En disposant des cailloux en triangles, carrés et autres formes, on a pu découvrir que le n-ième nombre triangulaire est la somme de tous les nombres naturels jusqu'à n. Le mathématicien Gauss utilisa comme exemple la décomposition d'un nombre jusqu'à obtenir ce que l'on appelle aujourd'hui la formule de Gauss. Si l'on prend comme exemple la somme des nombres de 1 à 100. Cela donne la valeur 5050.

5050 = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100 = (1+100) + (2 + 99) + (3 + 98) + ...+ (50 + 51) = 101 + 101 + 101 + ...+ 101 = 50 * 101 = 5050

La formule de Gauss pour le n-ième nombre triangulaire est donc (n/2) * (n + 1). Pour n valant 11, le nième nombre triangulaire vaut donc 66 comme le montre la figure suivante.

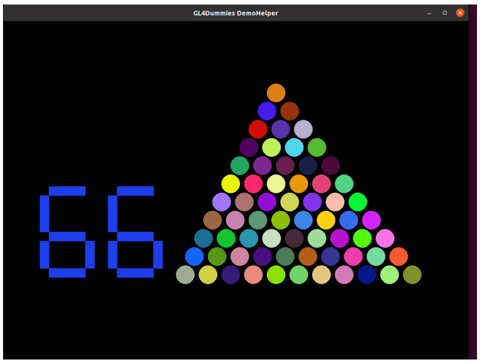

Figure 5: Les nombres polygonaux triangulaires

Le n-ième nombre carré, pour sa part, est égal à la somme des n premiers nombres impairs et aussi à la somme des (n - 1)-ième et n-ième nombres triangulaires.

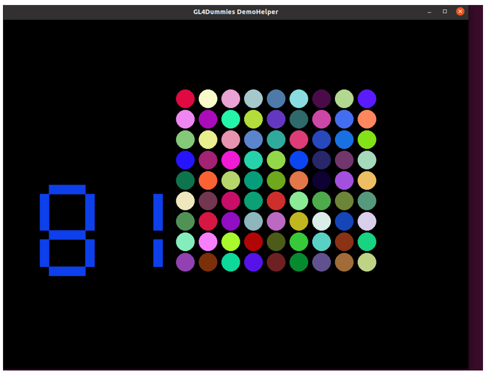

Figure 6: Les nombres polygonaux carrés

2.5 Les nombres polyédriques

Un nombre polyédriques est un ensemble de boules, boulets de canon représentés en cubes où l'on peut faire des rapports étonnants entre des nombres triangulaires, carrées et cubiques. L'ensemble des boules représentant un nombre peut être fait sous forme triangulaire. Il s'agit d'un nombre tétraédrique qui est la somme des n premiers nombres triangulaires. Sa formule qui est associée aux nombres tétraédriques est : n(n+1)(n+2)/6. Le premier vaut 1, le deuxième vaut 4, le 3ème vaut 10, etc. J'ai réalisé dans mon programme l'animation de ces nombres tétraédriques avec un ensemble de boules colorées de manière aléatoire associé à un nombre qui est coloré aléatoirement à gauche.

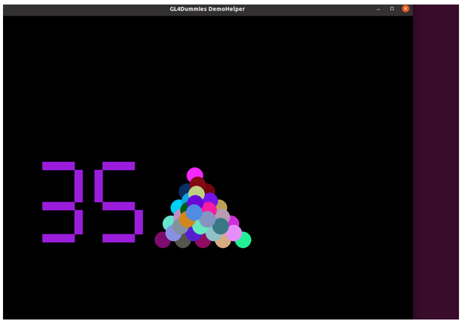

Figure 7: Les nombres tétraédriques

Il y a aussi les nombres pyramidaux qui sont des nombres polygonaux. Ce sont des nombres représentés sous forme d'une pyramide qui est la somme des n premiers nombres carrés. Sa formule qui est associée aux nombres pyramidaux est : n(n+1)(2n+1)/6. Le premier vaut 1, le deuxième vaut 5, le 3ème vaut 14, etc.J'ai réalisé dans mon programme l'animation de ces nombres pyramidaux avec un ensemble de boules colorées de manière aléatoire associé à un nombre qui est coloré aléatoirement à gauche.

Figure 8: Les nombres pyramidaux

Enfin, Il y a les nombres cubiques qui sont un ensemble de mini carrés formant un cube en 3d qui représente la puissance d'un nombre. Tout nombre cubique est la somme d'une suite consécutives de nombres impairs.

2.6 Les nombres d'or

Un nombre d'or est un nombre infini comme Pi = 3.14.... Il peut être représenté par une figure en cercle qui varie au niveau des formes. Le nombre d'or s'inspire de la suite de Fibonnaci. La suite de Fibonnaci est une suite où le résultat de chaque terme de la suite vaut la somme des résultats des deux derniers termes de la suite. Le nombre d'or s'inspire aussi de la forme de la phyllotaxie spiralée où l'on compte un seul organe par noeud et un angle de 135.7 degrés entre un organe et le suivant. L'animation que j'obtiens avec ce type de nombre est une figure qui varie avec plusieurs couleurs générés aléatoirement et le nombre correspondant à gauche qui change par rapport la figure et le nombre change de couleur de manière aléatoire.

Figure 9: Les nombres d'or

2.7 Les nombres complexes

Un nombre complexe c'est un nombre qui comporte deux parties:

-Une partie réel

-Une partie imaginaire.

La partie réel c'est un nombre quelconque qui appartient à l'ensemble des réels. La partie imaginaire est aussi un nombre appartenant à l'ensemble des réels. Un nombre complexe aura pour valeur sa partie réel additionnée à la partie imaginaire, elle même multipliée par i. Si on note x la partie réel et y la partie imaginaire, le nombre complexe est Z avec Z = a + ib. Il faut noter que a et b sont les coordonnées d'un point. Il faut savoir que i est un nombre particulier car i**2 = -1. Pour un réel, c'est vrai que le carré d'un nombre est toujours positifs mais pas forcément vrai pour un nombre complexe, à cause de cette propriété particulière que possède i. Un exemple c'est: 6+7i où 6 est la partie réel et 7 est la partie imaginaire.

Un nombre complexe peut être représenté par un point de repère. Le nombre complexe z = a + ib correspond au point M. Il faut dire aussi que la distance 0M correspond au module du nombre z. On peut donc en déduire que le module de z noté |z| = sqrt(a ** 2 + b ** 2).

On va maintenant définir ce qu'est une suite numérique. Une suite c'est une succession de nombre réels. Lorsqu'on parle de la suite Un, le nom de la suite est U et l'index est n. Il y a deux types de suite numérique: Une suite peut être définie en fonction de n. Par exemple Un = 6n + 2, où U2 = 6 * 2 + 2 = 14. Il existe maintenant comme deuxième type de suite la suite récurrente qui va permettre de calculer le terme de la suite qui dépend du précédent. Par exemple on prend une suite Un = 3Un + 2 et on a U0 = 2. Alors U1 = 3 * U0 + 2 = 8.

Pour montrer une exploitation des nombres complexes en graphisme j'ai choisi de programmer une fractale de type Mandelbrot. L'ensemble de Mandelbrot est une fractale qui est définie comme l'ensemble des points c du plan complexe pour lesquels la suite récurrente définie par Zn+1 = Zn**2 + c et la condition Z0 = 0 ne tend pas vers l'infini (en module). Il est facile à démontrer mathématiquement que si le module de Zn est supérieur à 2, alors la suite va diverger. Ceci sera très utile pour la programmation. On en déduit que l'ensemble de Mandelbrot est forcément inclus dans le cercle de rayon 2 et de centre (0,0). Ceci permet de dire que l'aire de cet ensemble est finie alors que le périmètre lui est infini, ce qui est la caractéristique d'un objet fractal. Comme le montre la figure 10 , dans le plan complexe défini par l'axe X spécifiant l'axe des réels et l'axe Y spécifiant l'axe des imaginaires, les points noirs sont des points qui appartiennent à l'ensemble de Mandelbrot.

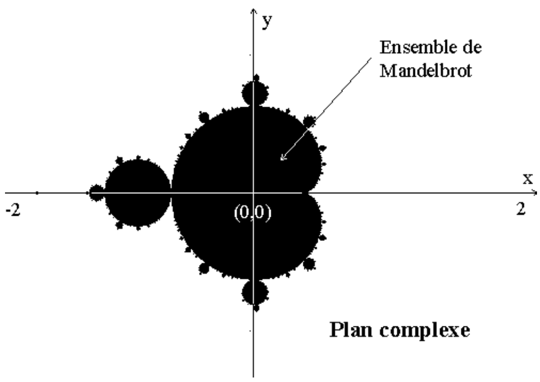

Figure 10: La fractale Mandelbrot et le plan complexe

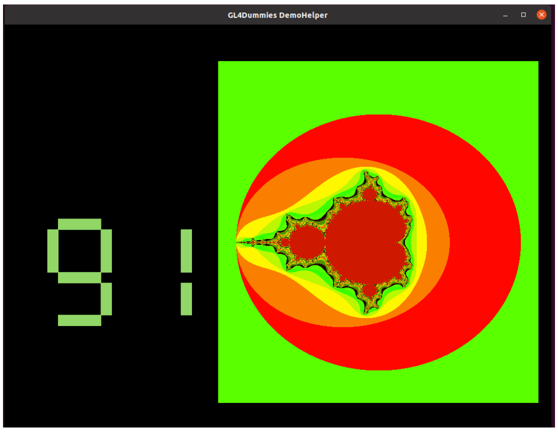

Figure 11: La fractale Mandelbrot

2.8 Epilogue de la démo

L'animation graphique se termine en simulant le logo utilisé par le groupe Kraftwerk pour les représenter graphiquement. C'est une façon de définir le crédit de la bande sonore de mon animation. Les quatre formes en bleu dans la figure suivante représente les musiciens devant leur clavier. Ils sont animés aléatoirement et leur design est assez grossier car il est fait de petits cubes comme l'est le vrai logo du groupe.

Figure 12: Crédit de l'animation

3 Conclusions

Ce projet est parti principalement de l'objectif de raconter une histoire, celle des nombres. A partir de cela, j'ai rattaché à ce projet la musique du groupe Kraftwerk qui est l'origine de la musique électronique d'aujourd'hui et que j'aime beaucoup. Ils ont innové également dans leurs clips vidéo en associant souvent à leur musique à une recherche visuelle très originale. Au départ, j'ai choisi le titre "Numbers" qui me paraissait bien représenter l'histoire des nombres que je voulais programmer. En raison de la contrainte des 64k, je n'ai malheureusement pas trouver cette bande sonore dans un autre format plus réduit tel que le format midi. J'ai malgré tout trouvé un autre titre de ce même groupe au format midi beaucoup moins lourd se nommant Models pouvant représenter l'idée de modèles mathématiques que peuvent représenter les nombres. Une version 64k est livrée dans mon archive, mais j'ai déposé également une autre version avec le premier titre "Numbers" qui ne respecte pas les 64k.

J'avais envie de représenter d'autres types de nombres mais la limite de 64k m'a vite fait prendre conscience que je ne pouvais pas aller plus loin. J'ai beaucoup aimé l'idée de partir d'un concept mathématique et de découvrir comment on pouvait lui associer une représentation graphique. L'implémentation de chaque type de nombre m'a permis de me lancer à chaque fois dans une nouvelle aventure visuelle. Même si le programme n'est pas très grand, il a demandé beaucoup de temps de mise au point, d'ajustement et de recherche algorithmique pour élaborer les formes souhaitées. Je n'ai pas pu exploité tout l'apport technique que l'enseignement de Mr Farès Belhadj m'a apporté mais je le remercie vraiment pour sa passion de ce domaine, la qualité de son enseignement , qui me donne envie de progresser en exploitant notamment dans le futur toutes les ressources pédagogiques qu'il a créées.

References

[COR2023] Fernando Corbalan, *Le nombre d'or, Le monde, HORS SERIE, 2023.*

[DON2018] Robert Donaldson, *Programming for Patterns and Mathematical Art, Robert Donaldson, 2018.*

[KRA2000] Kraftwerk, *titre de musique : Numbers de l'album The music 2000, Groupe Kraftwerk, 2000.*

[KRA2023] Le site web de Kraftwerk, *Site web du groupe Kraftwerk, https://kraftwerk.com/, 2023*

[LIN2022] Oliver Linton, *Nombres vers l'infini et au-delà, Marabout,Hachette Livre pour l'édition, 2023.*